

# Úvod do obálek volatility ceny dluhopisů

*Bohumil Stádník\**

## **Abstrakt:**

Běžný pohled investorů, vycházející ze základních znalostí o citlivosti ceny dluhopisu na změny úrokových sazeb, předpokládá, že dluhopisy s delší dobou do splatnosti vykazují obecně vyšší cenovou volatilitu než dluhopisy krátkodobé a že se proto volatilita v průběhu života dluhopisu — s postupně klesající dobou do splatnosti — zpravidla snižuje. Tento výzkum, který rozšiřuje, zpřesňuje a názorněji ilustruje předchozí autorovy studie, však ukazuje, že tento pohled představuje pouze jednu z několika možných variant.

## **Klíčová slova:**

Volatilita dluhopisů, obálka vývoje volatility, režimy vývoje volatility dluhopisů

**JEL klasifikace:** G10, G23

## **1. Úvod do problematiky**

Běžný pohled investorů je spojen s představou obecně vyšší volatility ceny u dluhopisů s delší dobou do splatnosti než u dluhopisů krátkodobých, takže by se volatilita měla i během života dluhopisu, tedy s klesající dobou do splatnosti, obecně snižovat. Tento běžný postoj investorů zaznamenali například již Fuller & Settle (1984).

Volatilitou rozumíme míru fluktuací ceny, přičemž tato míra fluktuací je částečně deterministická a částečně náhodná. Náhodná složka je způsobena nepředvídatelnými vlivy, jako je fluktuace výnosu do splatnosti, který samozřejmě souvisí například i s vývojem kreditního rizika emitenta a celé řady dalších makro i mikroekonomických faktorů. Deterministická složka by měla s postupem času vytvářet „zužující se“ obálku volatility ceny, a tím snižovat celkovou míru fluktuací.

Následný výzkum souvisí s deterministickou složkou volatility, přičemž náhodné výchylky výnosu do splatnosti eliminujeme tím, že výnos do splatnosti předpokládáme jako konstantní. Při hlubším studiu problematiky docházíme k závěru, že tvar obálky může být i odlišný od „zužujícího se“ a že dokonce v případě

---

\* doc. Ing. Bohumil Stádník, Ph.D. Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví, nám. W. Churchilla 4, 130 67, Praha 3 (e-mail: bohumil.stadnik@vse.cz).

extrémně vysokých hodnot úrokové míry a delší doby do splatnosti dochází k režimu, kdy se volatilita s postupem času zvyšuje.

Běžně akceptovaný vývoj volatility se tak stává pouze jedním z možných režimů vývoje a pro odlišení od ostatních jej nazveme „typickým“ režimem vývoje volatility. Tento článek vychází zejména z publikace Stádník (2014) a navazujících publikací autora. Základní dluhopisové pojmy lze dohledat například ve Fabozzi (2010) a Stádník (2015).

## 2. Křivka konstantního výnosu do splatnosti

Nyní prodiskutujeme již obecně známé vztahy, které jsou však podstatné pro další porozumění. Rovnice (1), kde  $P_{total}$  značí aktuální celkovou cenu (včetně  $AÚV$ ) v procentech ze jmenovité hodnoty,  $i$  značí výnos do splatnosti (**dále v obrázcích značený též jako YTM**), vyjádřený v procentech za kupónovou periodu,  $c$  je kupónová sazba v procentech za kupónovou periodu,  $n$  je počet kupónových plateb,  $T$  je počet dní v kupónové periodě a  $d$  je počet dní do nejbližší kupónové výplaty. Dále platí, že výplata kupónu je v ex-coupon day, tedy settlement day kupónu připadá na ex-coupon day.

$$P_{total} = \frac{1}{(1+\frac{d}{T})} \left[ c + \frac{c}{(1+i)} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c+100}{(1+i)^{n-1}} \right] \quad (1)$$

Vztah (1) je tedy funkcí  $P_{total}$  v závislosti na  $i$ , je založena na jednoduchém úročení uvnitř necelé první kupónové periody a na smíšeném úročení pro zbytek období. Po zavedení následujících předpokladů:

- 1)  $d=T$
- 2)  $i$ =konstanta, pro vyloučení náhodné složky ve vývoji ceny
- 3) zavedení proměnného času  $t$ , který nabývá nespojitých hodnot  $0, 1, 2 \dots n$
- 4) alikvotní úrokový výnos se rovná nule, jelikož vypořádání kupónové výplaty je v den ex-kupónu

a po následných triviálních úpravách obdržíme vztah (2), kde  $P_{clean}$  je tzv. čistá cena v závislosti na čase.

$$P_{clean} = c \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i} + \frac{100}{(1+i)^{(n-t)}} \quad (2)$$

Jedná se vlastně o  $P_{total}$  pro okamžiky, kdy  $AÚV$  je rovné nule. První a druhá derivace rovnice (2) podle času (rovnice 3 a 4) popisují tvar křivky, která je vzestupná a konvexní v případě nákupu dluhopisu pod jmenovitou hodnotou a sestupná a

konkávní při nákupu nad jmenovitou hodnotou. V případě nákupu za jmenovitou hodnotu, je průběh konstantní o velikosti jmenovité hodnoty. Rozhodujícím faktorem je vzájemná velikost  $c$  a  $i$ .

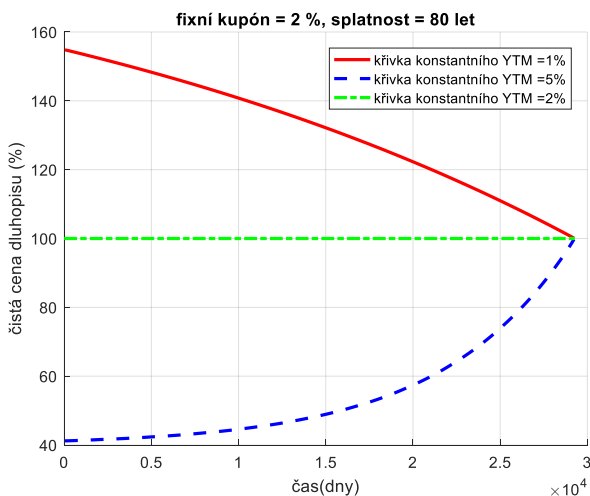
$$P'_{clean} = (100 - \frac{c}{i})(1 + i)^{(t-n)} \ln(1 + i) \quad (3)$$

$$P''_{clean} = (100 - \frac{c}{i})(1 + i)^{(t-n)} \ln^2(1 + i) \quad (4)$$

### 3. Obálka volatilit

Jestliže se výnos do splatnosti nemění, bude vývoj ceny hladkou křivkou jako na obr. 1, která začíná cenou a na obrázcích je označena jako „křivka konstantního výnosu do splatnosti“.

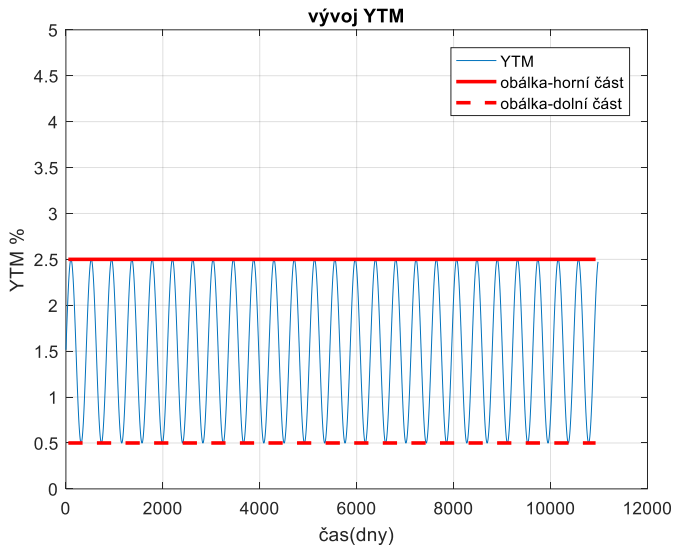
**Obr. 1 Příklady tří základních tvarů křivek konstantního výnosu do splatnosti dluhopisu s pevnou kupónovou sazbou**



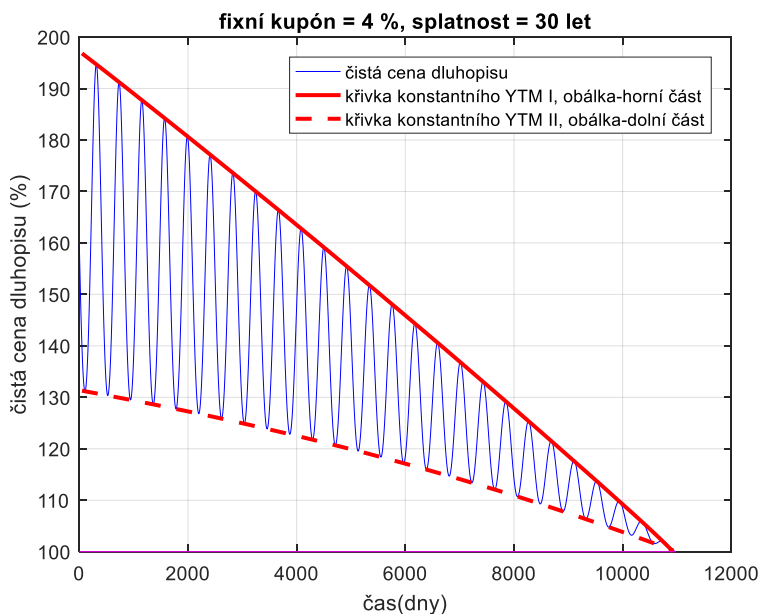
Můžeme zde pozorovat tzv. „Pull to Par“ efekt – tendence postupného směřování ceny ke 100 % z Face Value. Hladká křivka vývoje je však prakticky nereálná, jelikož ve skutečnosti se výnos do splatnosti v čase náhodně mění. Jestliže si položíme otázku, jak se bude vyvíjet volatilita ceny, jestliže se výnos do splatnosti bude pohybovat mezi dvěma určitými výnosy a míra jeho fluktuací bude konstantní, získáme odpověď v podobě dvou křivek konstantního výnosu do splatnosti, které vytvoří obálku volatilit. Pro názornost a jednoduchost zvolme vývoj výnosu do splatnosti sinusového charakteru, který má konstantní fluktuace mezi dvěma hodnotami, jak je to na obr. 2 a)

**Obr. 2 Obálka volatility, jestliže se výnos do splatnosti bude pohybovat sinusově mezi 0,5 a 2,5 %, podobrázek a), pro dluhopisy s fixní kupónovou sazbou 4 %, 1,5 % a 0,5 %, podobrázky b), c), d)**

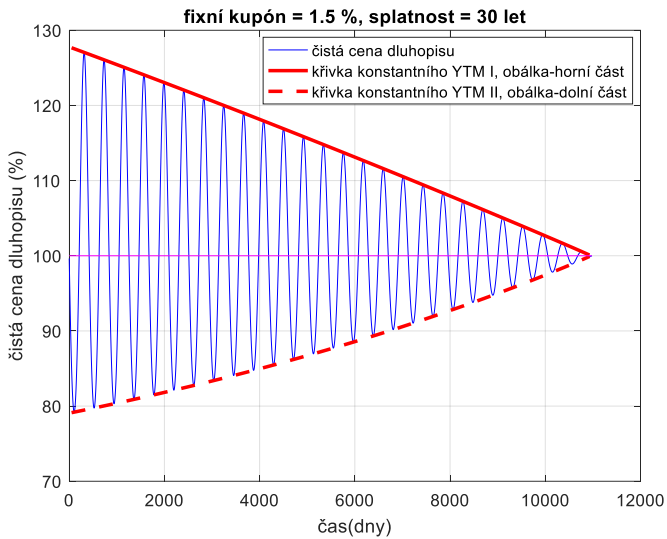
a)



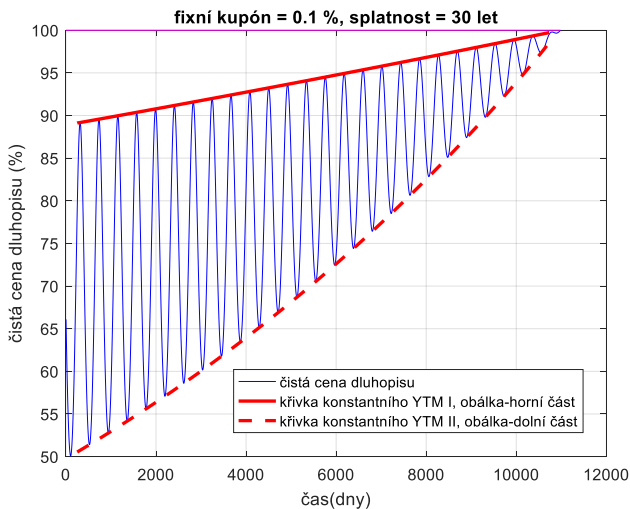
b)



c)



d)



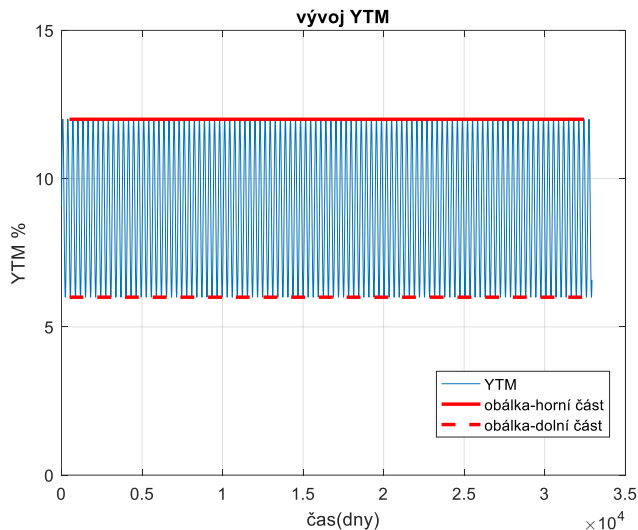
#### 4. Myšlenka různých režimů volatility

Při „hraní“ si s parametry dluhopisu dojdeme k různým tvarům obálek volatility a stává se aktuální myšlenka pro zavedení více typů/režimů volatility. Zdá se, že při zvyšování  $i$  a doby do splatnosti „typický“ vývoj volatility, dle obr. 2, kdy se

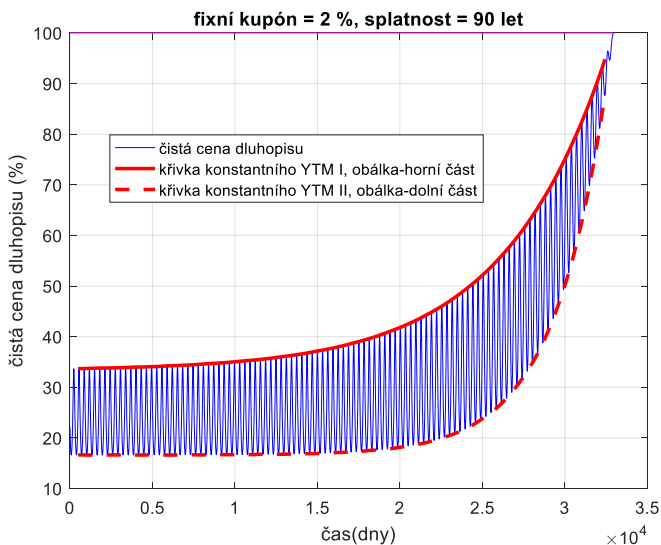
volatilita s časem vždy zmenšuje, může přejít na „netypický“, kdy se může v čase zvyšovat, jak je zachyceno na obrázku 3b)

**Obr. 3 Obálka volatility netypického režimu volatility, modelový případ vývoje výnosu do splatnosti 3 a), odpovídající obálka 3 b)**

a)



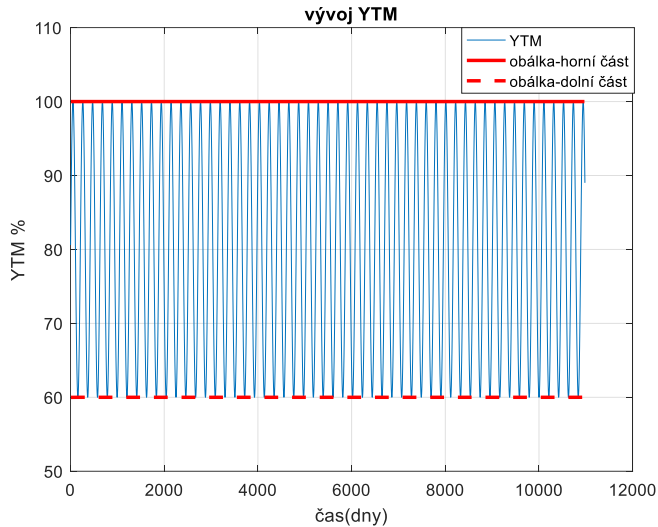
b)



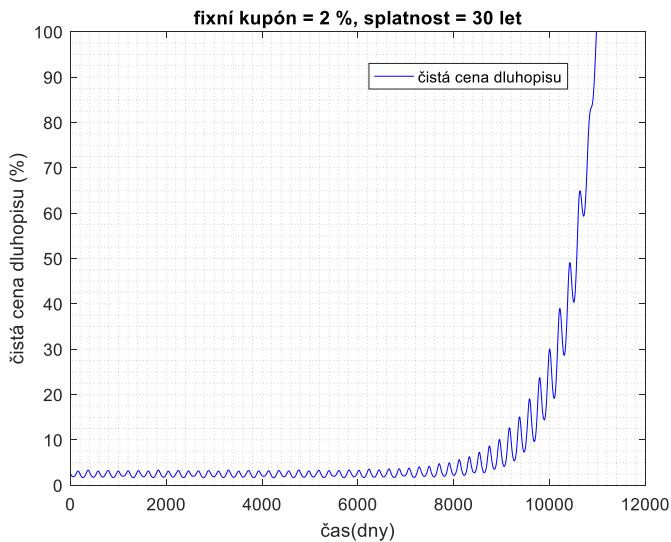
a dokonce i na „inverzní“, kdy se volatilita stále zvyšuje až do okamžiku splatnosti. Proces je zachycen na obrázku 4b), detailně pak 4c), d).

**Obr. 4 Obálka volatilita inverzního režimu volatilita, modelový případ vývoje výnosu do splatnosti 4 a), odpovídající obálka 4 b), detailně 4 c), d)**

a)

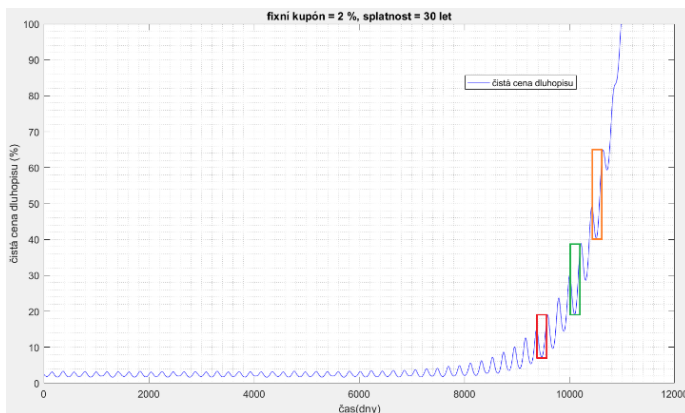


b)



## B. STÁDNÍK: Úvod do obálek volatility ceny dluhopisů

c)



d)



### 5. Definice přechodových bodů mezi režimy

Aby nabyly výše uvedené úvahy praktické podoby, budeme se nyní snažit nalézt numerické hodnoty výnosu, kdy „typický“ vývoj volatility přechází na „netypický“, anebo dokonce na „inverzní“. Intuitivně cítíme, že se tak stane při zvyšování výnosu do splatnosti. V souladu s obr. 3 a výše popsanými úvahami očekáváme určitou minimální úroveň výnosu do splatnosti, kdy se u konkrétního dluhopisu změní režim „typického“ vývoje volatility na „netypický“. Tuto hodnotu výnosu nazveme přechodový bod 1. Při dalším zvyšování výnosu očekáváme určitou



Přechodový bod 1 lze tedy v souladu s logikou výše uvedeného chápat jako nejmenší  $i$ , které řeší alespoň jednu nerovnici uvedené soustavy. Přechodový bod 2, pak odpovídá nejmenšímu  $i$ , které vyhovuje celé soustavě, tedy křivka závislosti ceny na  $i$  je v čase více a více strmá. Dále je nutné si uvědomit, že přechodové body závisí též na  $n$  a  $c$ .

Pro srozumitelnější interpretaci můžeme soustavu nerovnic vynásobit  $-1$ . Z první nerovnice dostaneme nerovnici (6). Pak lze jednoduše interpretovat soustavu (5) též tak, že nerovnice je pro dané  $i$  splněná, jestliže strmost křivky ceny dluhopisu v závislosti na výnosu do splatnosti se zvyšuje s menší dobou do splatnosti.

$$\frac{1 \cdot c}{(1+i)^2} + \frac{2 \cdot c}{(1+i)^3} + \dots + \frac{m \cdot (c+100)}{(1+i)^{m+1}} \geq \frac{1 \cdot c}{(1+i)^2} + \frac{2 \cdot c}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n \cdot (c+100)}{(1+i)^{n+1}} \quad (6)$$

Z praktického hlediska lze očekávat, že dluhopis může během svého života procházet postupně více ze zmíněných režimů. Taková situace může nastat, jestliže je například hladina úrokové míry více volatilní, popřípadě se dluhopis nachází v blízkosti přechodového bodu 1 nebo 2.

## 6. Numerické hodnoty přechodových bodů

Na základě soustavy nerovností (5) můžeme numericky určit hodnoty přechodových bodů. V tab. 1 jsou řešení pro splatnosti od 1 do 100 let. Výnos  $i$  se mění od 0 do 100 % p.a. a kupónové sazby nabývají hodnot 1, 3, 5, 7 a 9 % p.a. Je zřejmé, že pro delší splatnost má přechodový bod 1 nižší hodnotu než v případě kratší splatnosti, což je i v souladu s obecnými úvahami v práci Fuller a Settle, 1984. Dále zjišťujeme, že hodnota přechodového bodu 2 je vždy větší než 50 % a jeho hodnota je dána přechodovým bodem 1 pro nejmenší splatnost pro každou kupónovou sazbu.

**Tab. 1 Přechodové body během života jednoho dluhopisu**

splatnost [roky]	přechodový bod 1 [%]					přechodový bod 2 [%]				
	c=1	c=3	c=5	c=7	c=9	c=1	c=3	c=5	c=7	c=9
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
4	34,7	37,4	40,1	42,7	45,4	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5

5	26,5	28,8	31,3	33,8	36,3	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
6	21,3	23,6	26,1	28,4	30,8	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
7	18,1	20,2	22,5	24,9	27,2	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
8	15,5	17,8	20,0	22,3	24,6	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
9	13,7	15,9	18,2	20,4	22,7	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
10	12,3	14,5	16,7	19,3	21,2	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
11	11,1	13,3	15,5	17,7	19,9	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
12	10,1	12,4	14,6	16,8	19,0	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
13	9,1	11,6	13,9	16,0	18,2	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
14	8,8	11,0	13,1	15,3	17,4	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
15	8,3	10,4	12,6	14,7	16,8	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
20	6,4	8,5	10,6	12,7	14,8	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
25	5,3	7,3	9,4	11,5	13,6	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
30	4,5	6,6	8,7	10,7	12,8	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
35	4,0	6,1	8,1	10,2	12,3	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
40	3,6	5,7	7,7	9,8	11,8	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
45	3,3	5,4	7,4	9,5	11,5	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
50	3,1	5,2	7,2	9,2	11,3	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
55	2,9	5,0	7,0	9,0	11,1	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
60	2,8	4,8	6,8	8,9	10,9	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
65	2,6	4,7	6,7	8,7	10,8	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
70	2,5	4,5	6,6	8,6	10,6	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
75	2,4	4,4	6,5	8,5	10,5	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
80	2,3	4,4	6,4	8,4	10,4	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
85	2,3	4,3	6,3	8,3	10,3	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
90	2,2	4,2	6,2	8,3	10,3	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
95	2,1	4,1	6,2	8,2	10,2	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5
100	2,1	4,1	6,1	8,1	10,2	51,6	54,5	57,5	60,5	63,5

Pro splatnost 2 roky a menší nebyl přechodový bod 1 a tudíž ani přechodový bod 2 v rozmezí 0-100 % nalezen. Nalezená hodnota je větší než 100 %, která však dle našeho názoru ztrácí zcela praktický smysl. Z tohoto důvodu předefinováváme inverzní režim na režim, kdy se volatilita ceny zvyšuje až do počátku splatnosti rovné dvěma rokům.

## 7. Úloha o stejné investované částce

Vzhledem k rovnici (1) byly všechny dosavadní úvahy v procentech z Face Value.

Jiná je situace při stejné investované částce, která je v praxi řešená častěji než úloha o stejné Face Value. Například pro dva bezkupónové dluhopisy při stejné  $F$  a  $YTM$  platí:

$$P_1 = \frac{F}{(1+YTM)^n}$$
$$P_2 = \frac{F}{(1+YTM)^m} \quad (6)$$

kde  $P_1, P_2$ , je současná cena „prvního“ a „druhého“ dluhopisu a  $n, m$  odpovídá jejich splatnostem v letech,  $F$  je pak Face Value.

Abychom u prvního dluhopisu investovali stejnou částku  $P = P_2$ , pak musíme levou i pravou stranu rovnice (6) vynásobit  $\frac{P_2}{P_1}$  a upravit tak  $F$  u prvního dluhopisu.

$$P = \frac{F \frac{P_2}{P_1}}{(1+YTM)^n}$$

Pro  $\Delta P$  u prvního dluhopisu dostáváme:

$$\Delta P = -DUR_1 \frac{P}{(1+YTM)} \Delta YTM$$

Pro  $\Delta P_2$  u druhého dluhopisu dostáváme:

$$\Delta P_2 = -DUR_2 \frac{P_2}{(1+YTM)} \Delta YTM$$

Poměr skutečných výchylek v jednotkách měny bude, jelikož  $P=P_2$ :

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_2} = \frac{DUR_1}{DUR_2}$$

Zatímco poměr při stejné  $F$  bude:

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{DUR_1 P_1}{DUR_2 P_2}$$

Výchylka prvního dluhopisu se změní z:

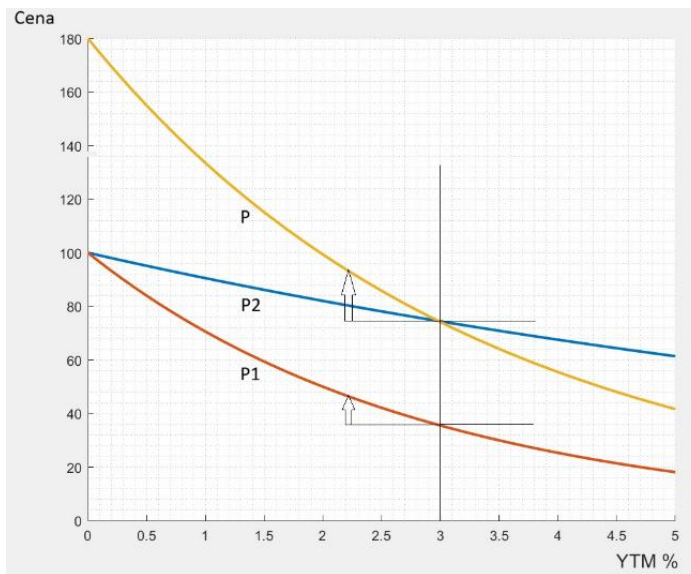
$$\Delta P_1 = -DUR_1 \frac{P_1}{(1+YTM)} \Delta YTM = -DUR_1 \frac{F}{(1+YTM)^n} \Delta YTM$$

na

$$\Delta P = -DUR_1 \frac{P}{(1+YTM)} \Delta YTM = -DUR_1 \frac{\frac{F \cdot P_2}{P_1}}{(1+YTM)^n} \Delta YTM$$

Když tedy první dluhopis bude mít menší cenu  $P_1$ , pak při stejné investované částce se výchylka  $\Delta P$  zvětší  $\frac{P_2}{P_1}$  krát. Situace se tedy pro risk management v případě stejné investované částky zkomplikuje.

**Obr. 5 Porovnání situací při investování ve stejné procentuální částce z Face Value a při stejné investované částce v jednotkách měny**

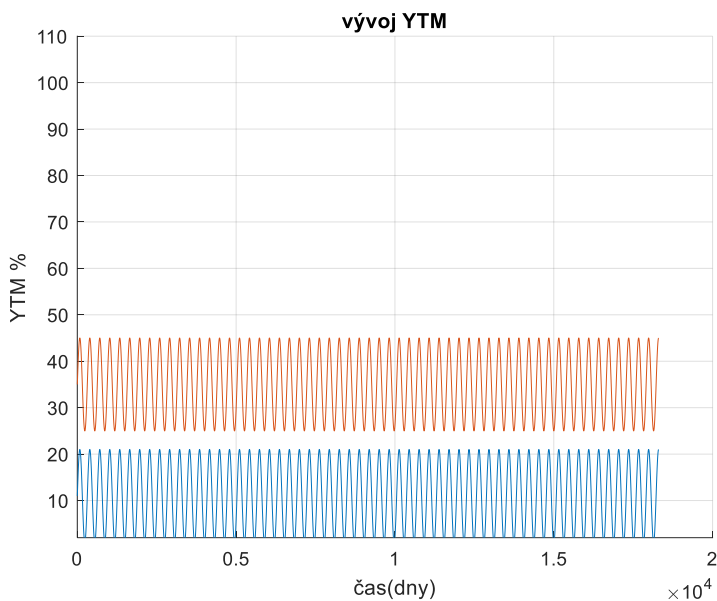


Na obrázku 5 je graficky znázorněná výše popsaná situace, kdy do 2 dluhopisů (modrá a červená křivka) investuji jednak při stejné Face Value a jednak při stejné investiční částce (modrá a žlutá křivka). Z obrázku 5 je zřejmé, že investice při stejné investiční částce přináší vyšší volatilitu dluhopisu, jelikož žlutá křivka má vyšší strmost, než červená, ze které žlutá křivka vznikla navýšením Face Value.

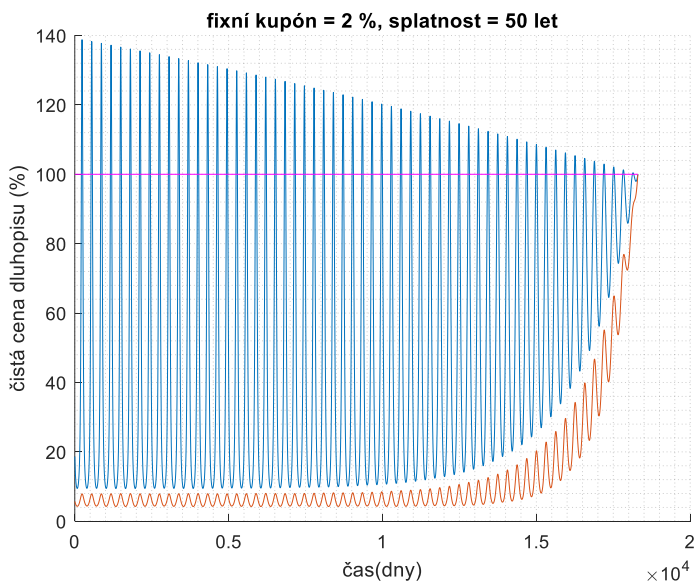
Porovnání situací jednak při investování stejné procentuální částky z Face Value a při stejné investované částce v jednotkách měny je dobře znázorněno na obrázku 6.

**Obr. 6 Porovnání situací jednak při investování stejné procentuální částky z Face Value a při stejné investované částce v jednotkách měny**

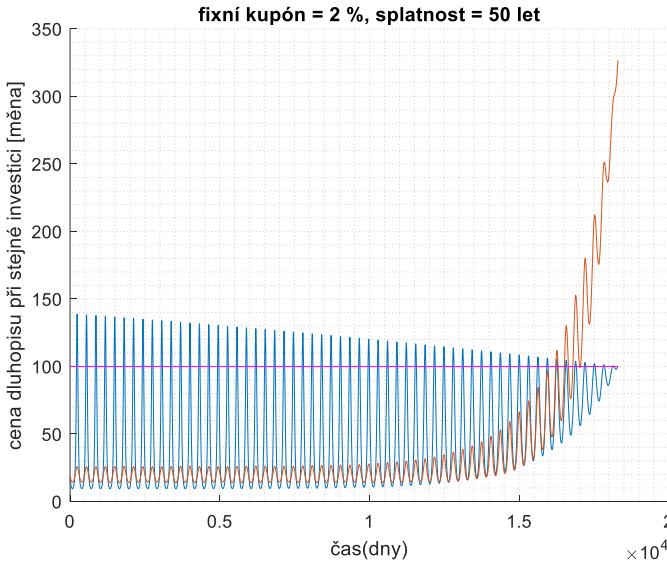
a)



b)



c)



Na obrázku 6 a) je model vývoje výnosu do splatnosti, kdy pro názornost a jednoduchost volíme sinusový průběh, jako v předchozích případech, na obrázku 6 b) je vývoj volatility při stejné Face Value a na obrázku 6 c) je vývoj volatility při stejné investiční částce do obou dluhopisů.

## 8. Praktická využitelnost při řízení rizik

Z tabulky 1 vyplývá, že přechodové body jsou spojeny s neobvykle vysokými výnosy do splatnosti. Nicméně například při době do splatnosti delší než 50 let může k netypickému režimu dojít již při zvýšení výnosu do splatnosti nad 3,1 %, přičemž při ještě delších splatnostech postačuje i nižší výnos do splatnosti. Tato problematika je aktuální také u dluhopisů, jako jsou například junk bonds a obdobné instrumenty, jelikož při splatnosti těsně nad 10 let postačuje zvýšit výnos do splatnosti nad 10 %.

## 9. Závěr

V této finančně-inženýrské studii navazujeme na původní práci Stádník (2014) a současně se pomocí výpočetní techniky a vizualizací snažíme názorněji vysvětlit poměrně obtížnou problematiku. Ve studii jsou přesně vymezena pravidla vývoje volatility čisté ceny dluhopisu v čase, a to zejména v závislosti na obecné hladině

úrokových měr v ekonomice, která se promítá do výnosu do splatnosti dluhopisu, a na parametrech tohoto investičního instrumentu.

Hlavním přínosem práce je identifikace a definování několika různých režimů, které determinují časový vývoj volatility, a dále numerický výpočet hodnot výnosu do splatnosti, při nichž dochází k přechodům mezi jednotlivými režimy (tzv. přechodových bodů) v závislosti na různých parametrech dluhopisu.

Cílem práce je rovněž určité zjednodušení teoreticky náročného pozadí celé problematiky a její jasná finanční interpretace.

Výsledky práce přinášejí zajímavé poznatky, které lze aplikovat jak na průběh života jednotlivého dluhopisu, tak na aktuální chování portfolia dluhopisů s různou dobou do splatnosti. Studie představuje základní finanční výzkum v oblasti teorie dluhopisů a její praktický význam spočívá zejména ve správě portfolia a řízení rizik.

## Reference

Fabozzi, F. J. (2010). *Bond markets, analysis and strategies* (7th ed.). Prentice Hall.

Fuller, R. J., & Settle, J. W. (1984). Determinants of duration and bond volatility. *Journal of Portfolio Management*, 10(4), 66–72.

Stádník, B. (2014). The volatility puzzle of bonds. In *Business and management 2014: 8th International Scientific Conference* (pp. 313–319). Vilnius Gediminas Technical University. <https://doi.org/10.3846/bm.2014.039>.

Stádník, B. (2015). *Trhy dluhopisů*. Nakladatelství Oeconomica.

# Introduction to the Envelopes of Bond Price Volatility

*Bohumil Stádník*

**Anstract:**

The view of ordinary investors, based on a basic knowledge of the sensitivity of the bond price to changes in interest rates, assumes that bonds with longer maturities generally exhibit higher price volatility than short-term bonds, and therefore volatility decreases over the life of the bond — as the time approaches maturity. However, this research, which expands, refines and illustrates the author's previous studies, shows that this view represents only one of several possible variants.

**Keywords:**

Bond volatility, volatility envelope, bond volatility patterns

**JEL clasification:** G10, G23